

# Reflexiones en torno al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en la formación de ingenieros mediada con GeoGebra

Recibido:  
08/12/2024  
Aceptado:  
19/03/2025  
Publicado:  
22/03/2025

## Reflections on the study of systems of linear equations in engineering education mediated by GeoGebra

Rafael Antonio Arana-Pedraza, Silvia Elena Ibarra Olmos\*

\* Matemática Educativa. Posgrado en Matemática Educativa. Universidad de Sonora. Boulevard Luis Encinas y Calle Rosales s/n, Col. Centro, Hermosillo, Sonora 83000. <https://orcid.org/0000-0002-2794-0292>, <https://orcid.org/0000-0002-1344-2516>.

\*Autora de correspondencia: [silvia.ibarra@unison.mx](mailto:silvia.ibarra@unison.mx)

### RESUMEN

La importancia del estudio de temas básicos de Álgebra Lineal en el plan de estudios de las distintas carreras de ingeniería es reconocida por organizaciones nacionales e internacionales. Temas como sistemas de ecuaciones lineales, matrices, determinantes, espacios vectoriales y transformaciones lineales pueden ser encontrados en el currículo básico de las ingenierías; esto se debe no solo a su gran aplicabilidad, sino que también son considerados como la puerta de entrada para el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático como la generalización y la abstracción. Aunado a lo anterior, las investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas señalan la necesidad de trabajar en el aula bajo nuevos supuestos e integrando nuevos medios de apoyo para la enseñanza.

En este contexto, se presenta el diseño de una actividad de aprendizaje que puede ser planteada al iniciar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Tiene como características que surge a partir del planteamiento de una situación que trata un problema de flujo de tráfico en un sector de una ciudad; se utiliza un applet de GeoGebra, acompañado de una serie de interrogantes, que tienen la intención de promover la comprensión del citado problema. Además, la experiencia generada se considera que puede jugar un papel importante en la construcción del sistema de ecuaciones lineales que lo modela.

### Palabras clave:

Álgebra lineal, flujo de tráfico, ingeniería.

### ABSTRACT

The importance of studying basic topics in Linear Algebra within the curricula of various engineering disciplines is recognized by national and international organizations. Topics such as systems of linear equations, matrices, determinants, vector spaces, and linear transformations can be found in the core curriculum for engineering programs; this is due not only to their wide applicability but also because they are considered a gateway to developing mathematical thinking skills such as generalization and abstraction. Furthermore, research on the learning and teaching of mathematics highlights the need to work in the classroom under new assumptions and to integrate new support tools for teaching. In this context, a learning activity is designed that can be proposed at the beginning of the study of systems of linear equations. It is characterized by arising from the presentation of a situation that addresses a traffic flow problem in a sector of a city; it utilizes a GeoGebra applet, accompanied by a series of questions intended to promote understanding of the problem. Moreover, the experience generated is considered to play an important role in constructing the system of linear equations that models it.

### Keywords:

Linear Algebra, Traffic Flow, Engineering



## INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal (AL) ha sido un campo disciplinar destacado en el ámbito relacionado con las áreas STEM, es decir, con la Ciencia, la Tecnología, la Ingeniería y las Matemáticas. Además, su uso competente ha llevado a dar un impulso en las oportunidades profesionales en áreas relacionadas con ciencias de datos, procesamiento de señales, criptografía, ciencias computacionales, entre otros.

De acuerdo con lo que plantean Álvarez-Macea y Costa (2019), existen una gran variedad de situaciones-problema y aplicaciones de ingeniería que pueden ser abordados desde los contenidos que se estudian en los cursos de AL (por ejemplo: vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, y transformaciones lineales) convirtiéndola en una de las asignaturas con un potencial mayor de aplicación en ingeniería, junto con cursos como el Cálculo Diferencial e Integral o las Ecuaciones Diferenciales. Además de lo anterior, un primer curso de AL representa el primer contacto que los estudiantes tienen con objetos matemáticos que tienen un gran nivel de abstracción, como son los espacios vectoriales y las transformaciones lineales y que por tal razón son susceptibles de convertirse en fuente de dificultades.

En este sentido, en diversos estudios alrededor de las asignaturas de AL en el contexto universitario, se ha encontrado evidencia de algunas situaciones que se pueden asociar a las dificultades de los estudiantes al cursarlos, relacionadas con cuestiones de origen epistemológico, el formalismo y el uso de distintos tipos de lenguaje, y sobre el diseño didáctico. Pozas y colaboradores (2023) estudiaron los libros que se utilizan para la enseñanza del Álgebra Lineal a futuros ingenieros en Argentina. Como parte de los resultados de su análisis, señalan que, a pesar de que en dichos libros se resalta la importancia del AL a través de su aplicabilidad en áreas como la Ingeniería, Física, Biología, Economía, Estadística, entre otras ciencias, sin embargo, la ubicación de estas aplicaciones así como su relación directa con el contenido teórico queda a consideración de los responsables del curso. También el nivel de abstracción que algunos tópicos tienen, como los ya señalados, espacios vectoriales y transformaciones lineales, traen consigo la posibilidad de generar dificultades para el alumnado. Estos señalamientos se pueden advertir de la misma manera en textos utilizados en instituciones mexicanas dedicadas a la formación de ingenieros (véase, por ejemplo, Grossman y Flores, 2012; Kolman y Hill (2006); Lay, 2007).

Dentro de la formación de ingenieros, la reflexión sobre las matemáticas que se enseñan y la forma en que

se enseñan es un elemento importante, ya que curricularmente la formación matemática constituye un bloque significativo en el desarrollo integral de estos profesionistas. Aunado a lo anterior, en los cursos de matemáticas se proveen herramientas básicas para su desempeño, además se promueven habilidades como la resolución de problemas y la toma de decisiones. En este sentido, consideramos que existen al menos cuatro elementos que actualmente podrían ubicarse como necesarios en el caso particular de las clases de AL: a) que éstas sean conducidas mediante una estrategia didáctica de resolución de problemas; b) que dichos problemas sean planteados en situaciones que provengan de la ingeniería; c) que privilegien el trabajo con situaciones donde sea posible desarrollar un enfoque de modelización; d) que hagan uso de la tecnología digital como medio para contribuir a la conceptualización y comprensión de nociones matemáticas.

Todos estos elementos han sido estudiados de manera teórica y, metodológicamente abordados desde diferentes perspectivas en el ámbito de la Matemática Educativa; por ejemplo, desde 1993 el *Grupo de estudio sobre el currículo del Álgebra Lineal* (Stewart et al., 2022) ha examinado el rol de los cursos iniciales de AL en el currículo matemático intentando ofrecer recomendaciones para satisfacer las necesidades tanto de los estudiantes como de las disciplinas o campos de conocimiento que hacen uso de los contenidos de AL. Con el trabajo realizado en el transcurso de los años y tomando en consideración lo que las industrias demandan como habilidades necesarias (análisis e interpretación de datos, comprensión de modelos matemáticos para estudiar fenómenos diversos, incorporación en las tareas cotidianas de la tecnología digital e inteligencia artificial, entre otras) se ha situado al AL como un área que brinda mucho de los fundamentos de matemáticas que se necesitan actualmente en la industria.

Un tema que es infaltable en el programa de AL de cualquier carrera de ingeniería en México, y que también es sugerido por el *Grupo de estudio sobre el currículo de Álgebra Lineal* mencionado líneas arriba, es el de los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL). La gran cantidad de problemas que pueden ser modelizados mediante un SEL, explica su importancia; destacan entre ellos los algoritmos de ranking como el de Google, la programación lineal, los problemas de flujo de tráfico o redes, los modelos depredador/presa, las imágenes médicas, el equilibrio de ecuaciones de reacciones químicas, entre otros. Aunado a ello, puede ser la puerta de entrada para el estudio de las matrices y el resto de los temas considerados dentro de un currículo básico de AL.

Además de identificarse a los SEL como un elemento relevante en la formación de ingenieros debido a las conexiones que guardan con diversas aplicaciones en el quehacer profesional, su estudio se sitúa como una cuestión de significativa al ser un elemento transversal en la formación matemática de los estudiantes en diferentes niveles escolares. En México, su estudio forma parte del currículo matemático del Sistema Educativo Nacional desde la Educación Básica hasta la Educación Superior. Por esta razón, diseñar actividades que permitan mejorar la forma en que se enseñan y se aprenden los SEL, resulta importante para la formación matemática de los estudiantes, y más específicamente de los futuros profesionales de la ingeniería que se incorporarán al mercado laboral.

Bajo las consideraciones expuestas en los párrafos anteriores, en este documento se presenta el diseño de una actividad de enseñanza, que puede ser utilizada en un curso de AL básico, de cualquier carrera de ingeniería. Los detalles serán expuestos en la sección siguiente.

### Descripción de la actividad

De acuerdo con el análisis de los libros de texto en Argentina, realizado por Pozas y colaboradores (2023), se identificaron algunos contextos que también encontramos en los textos utilizados en México, sobre los cuales se trabaja para el estudio de los SEL en las escuelas de ingeniería. Entre las situaciones que se encontraron están las tareas relacionadas con calcular flujos de tráfico de vehículos o caudales de agua, el cálculo de intensidades de corriente, voltaje y resistencia, y el cálculo de la mejor solución de sistemas incompatibles relacionados con el método de mínimos cuadrados.

En este trabajo se considera que los problemas que contemplan el cálculo de flujos de tráfico y caudales podrían representar un contexto más generalizado susceptible de desarrollarse en diferentes programas de ingeniería y para cursos de tronco común. Además, este tipo de problemas coinciden en al menos una característica, que consiste en que parten de una hipótesis esencial sobre la conservación, es decir, al analizar cada uno de los nodos de intersección, la cantidad de flujo que entra es igual a la cantidad de flujo que sale.

Esta hipótesis es esencial para poder formular las distintas ecuaciones que podrán integrarse en un SEL. Si bien este tipo de problemas permitiría analizar y modelar situaciones con SEL de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas,  $m$  y  $n$  enteros no negativos, para la actividad que aquí se presenta, se tomó la decisión de plantear una situación inicial idónea donde, con un SEL de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, se pueda vincular la solución tanto con la simulación que se presente, así como con la representación gráfica en el espacio.

La actividad propuesta se refiere al problema de la determinación del flujo vehicular en una vía, a partir de conocer los sentidos en los que se da el tránsito y algunos datos conocidos sobre el flujo. La situación se presenta a los estudiantes a partir del siguiente enunciado en conjunto con la representación visual (ver Figura 1):

*El Departamento Desarrollo Urbano del municipio desea conocer cómo se distribuyen los automóviles que circulan en el malecón de la ciudad, para determinar si existe capacidad de afluencia vehicular que permita transitar en el área que se analiza y si existen diferentes formas de distribución del tráfico. A partir de análisis viales previos, se han recolectado algunos datos históricos sobre la afluencia de automóviles en el área. Considerando los datos que se brindan, realiza los cálculos pertinentes de tal manera que des respuesta a las interrogantes que se plantean.*



Figura 1. Representación del flujo vehicular

Es de interés conocer cómo se distribuye el tráfico desde cada una de las intersecciones de las calles. Inicialmente la actividad se diseñó para su uso con estudiantes, según la descripción que se realiza a continuación.

Para vincular la actividad con un SEL de 3 ecuaciones con 3 incógnitas se plantea la representación de calles aledañas al malecón de una ciudad, como se menciona en el enunciado descrito anteriormente. De tal manera que la calle en diagonal tenga algunas intersecciones y, además, que dichas calles tengan flujo de vehículos de manera unidireccional.

Se centra la atención en la validación de las soluciones del SEL con referencia a la situación planteada, de tal manera que un estudiante pueda reflexionar sobre la relación entre las posibles soluciones del SEL y las posibles soluciones con respecto a la situación que se propone resolver. Adicionalmente, se considera como una situación inicial que permita introducir el contexto de problemas sobre flujo vehicular para estudiar posteriormente un SEL de mayor tamaño.



El applet de GeoGebra que se generó (<https://www.geogebra.org/m/de9k2dsp>) tiene la intención de ser utilizado por el estudiante, es decir, no busca que éste tenga la necesidad o sea capaz de reproducir su construcción. La intención de dicho applet es, más bien, que el estudiante pueda explorar y experimentar de manera que reconozca información que le permita entender cómo plantear e interpretar el modelo de la situación, pero, sobre todo, validar la solución que encuentra a partir de la visualización de la representación de la situación en conjunto con la observación de la representación en el espacio del SEL.

De manera concreta, se espera que al manipular el applet que se proporciona, un estudiante pueda: 1) reconocer la propiedad de conservación mediante la identificación de las cantidades de vehículos que “entran y salen” en cada una de las intersecciones, 2) encontrar diferentes combinaciones numéricas de vehículos en el tránsito de cada intersección, 3) establecer una representación algebraica del flujo vehicular en cada intersección, y por ende, una representación del modelo a través de un SEL, 4) reflexionar sobre la validez de las posibles soluciones de la situación que se plantea en comparación con las infinitas soluciones que contempla el SEL.

Para la manipulación del applet se proporcionan tres deslizadores que hacen variar los flujos vehiculares que no se conocen, así como una casilla de entrada asociada al mismo deslizador; adicionalmente, se proporcionan tres casillas de control que permiten activar o desactivar elementos relacionados con la representación en el espacio del SEL que modela la situación. Esto se puede observar en la Figura 2.

Para guiar la exploración y motivar la reflexión se proponen una serie de consignas y/o preguntas para que el estudiante pueda manipular el applet, pero a la vez lo oriente hacia las reflexiones y resultados esperados.

Dichas consignas/preguntas son:

- Utilizando los deslizadores (o escribiendo en las casillas) busca una distribución del tráfico en el punto A que sea válida, es decir, valores de  $x_1$  y  $x_2$  que sean válidos para dicha intersección. Podrás observar que, si las cantidades son adecuadas, el punto cambiará su color de rojo a verde. ¿Qué sucede cuando se da el cambio de color?
- Replica este procedimiento para cada uno de los puntos de intersección restantes. ¿Cuáles serían los valores para  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ ? ¿existirán otros valores posibles para esos flujos de vehículos? ¿cuántas posibles soluciones existen para el problema? ¿es única o puede haber más de una? Argumenta.
- A partir de las relaciones que existen en cada una de las intersecciones de los carros que “entran y salen” de ella, establece una expresión algebraica que represente cada entronque.
- Las expresiones que se han planteado corresponden a un Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL) que modelan matemáticamente la situación, que corresponden a tres planos en el espacio. Activa la casilla para mostrar los planos y la intersección de estos. ¿Qué se puede inferir acerca de la solución del SEL analizando los planos y sus intersecciones?
- Resuelve el SEL planteado (utilizando el método de tu preferencia). ¿La solución encontrada corresponde con tu suposición inicial? ¿Cuál es la solución del SEL?
- Activa la casilla que muestra el punto de solución, ¿Qué sucede con el punto cuando se encuentra una solución que satisface el flujo de los tres puntos de intersección de las calles, es decir, cuando los tres puntos son verdes?

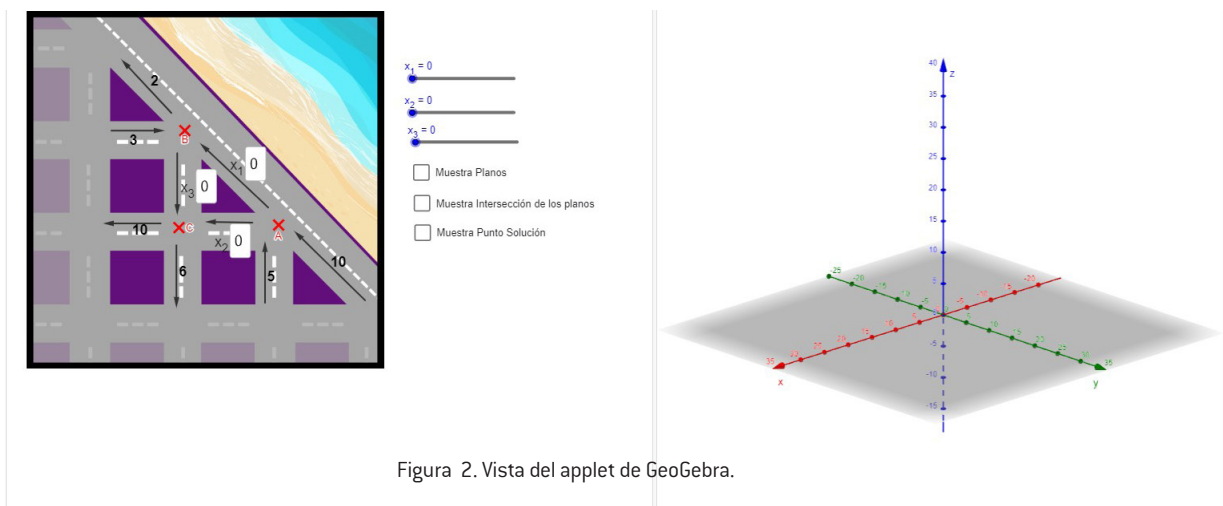


Figura 2. Vista del applet de GeoGebra.

- Si la recta en el espacio que representa la intersección de los planos contiene una infinidad de puntos, ¿existirán infinitas soluciones para la distribución del tráfico? ¿Cuántas posibles soluciones hay para la situación planteada? ¿y para el SEL?
- ¿Qué cuestiones o consideraciones se deben tener en cuenta para identificar cuáles soluciones existen para la situación planteada? ¿Se puede determinar cuáles serían?

Se esperaría que a partir de estas reflexiones un estudiante pueda llegar a establecer el conjunto de soluciones que sean válidas para la situación planteada reconociendo las características y restricciones que el contexto aporta y que condicionan a las incógnitas del SEL

## CONCLUSIONES

Se considera que, si bien el tipo de situación que se presenta ha sido ya abordado desde diferentes textos y perspectivas, es la inclusión de los siguientes elementos lo que potencializa su incorporación en los cursos de AL en ingeniería:

a) El desarrollo de la actividad mediante una estrategia didáctica de resolución de problemas donde a partir de la descripción de la situación que se aborda, los estudiantes formulan conjeturas y argumentaciones, las cuales, bajo una conducción apropiada del profesor, permiten arribar hacia la construcción del SEL que modela la situación planteada. Esto difiere del enfoque tradicional donde el profesor proporciona el modelo matemático que describe la situación, minimizando la participación de los estudiantes.

b) La selección del contexto en el que está planteado el problema, que, si bien está idealizado, de cierta manera es cercano al ejercicio profesional de algunos campos de la ingeniería, por ejemplo, la Ingeniería Civil quienes atienden problemas relacionados con el flujo de tráfico y fluidos en redes;

c) La promoción de tareas que propician que los estudiantes desarrollen nociones iniciales de modelización al impulsar prácticas relacionadas con las competencias de modelización propuestas por Maaß (2006) que se refieren a comprender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad, establecer un modelo matemático a partir del modelo real, resolver cuestiones matemáticas dentro de este modelo matemático, interpretar los resultados matemáticos con respecto a la situación real y validar la solución encontrada.

d) El uso de la tecnología digital para la reflexión permitirá que los estudiantes comprendan nociones sobre los SEL y les permita comprender, validar e interpretar sus soluciones. Por ejemplo, el uso de indicadores de color en el applet de GeoGebra para identificar cuando se mantienen las condiciones de equilibrio en cada intersección de las calles permitirá que los estudiantes lo reconozcan como la condición que permite mantener la igualdad en las expresiones algebraicas que conforman el SEL.

Finalmente, lo que se ha querido mostrar con esta actividad es la potencialidad de la transformación de un problema típico presentado en los libros de texto, cuando se identifican claramente los objetivos didácticos y la manera en que estos pueden ser alcanzados en el aula de clase, en un proceso de enseñanza que integra activamente a los estudiantes.

## AGRADECIMIENTOS

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti) por el apoyo brindado para Rafael Antonio Arana Pedraza como estudiante del programa de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora con la beca de número 4020264.

## LITERATURA CITADA

- Álvarez-Macea, F. y Costa, V.A. (2019). Enseñanza del Álgebra Álgebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Eco Matemático*.10(2): 65-78.
- Grossman, S., y Flores, J. J. (2012). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill.
- Kolman, B., y Hill, D. R. (2006). *Algebra Lineal*. Pearson Educación.
- Lay, D. C. (2007). *Algebra Lineal Y Sus Aplicaciones*. Pearson Educación.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
- Pozas, D.C., Araya, O.E. and y Santori, M.L. (2023). Análisis de aplicaciones de los sistemas de ecuaciones en textos de Álgebra Lineal. *Revista Chilena de Educación Matemática*. 15(1):15-30.
- Stewart, S., Axler, S., Beezer, R., Boman, E., Catral, M., Harel, G., McDonald, J., Strong, D., & y Wawro, M. (2022). The linear algebra curriculum study group (LACSG 2.0) recommendations. *Notices of the American Mathematical Society*. 69(5):813-819.

